1. Постоянное электрическое поле в вакууме.

Закон Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{21},$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на точечный заряд q_1 со стороны точечного заряда q_2, r – расстояние между зарядами, $\vec{e}_{21}$ - единичный вектор, направленный от заряда q_2 к заряду q_1, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная.

Напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая, на заряд q.

Потенциал электрического поля:

$$\varphi = \frac{W}{q},$$

где W – потенциальная энергия заряда q в поле.

Напряженность и потенциал поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r}\,, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда к точке пространства, в которой определяется поле.

Теорема Гаусса.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

где интегрирование ведется по произвольной замкнутой поверхности, q – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

Связь между напряженностью поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

где интегрирование ведется по любой линии, соединяющей точки 1 и 2.

Работа электрического поля по перемещению точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Энергия электростатического взаимодействия системы N точечных зарядов:

$$W_{12} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, созданный всеми зарядами кроме q_i в точке, где находится заряд q_i.

1.1. (9.1)Найти силу F притяжения между ядром атома водорода и электроном. Радиус атома водорода r = 0,5·10^{-10} м; заряд ядра равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Считая, что электрон находится на расстоянии равном *r*, найдем силу взаимодействия электрона и ядра, воспользовавшись законом Кулона:
.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

где *e*- элементарный заряд, равный величине заряда электрона, e= 1,6·10^{-19} Кл. Подставив числовые данные, получим:

$$F = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot (0{,}5\cdot 10^{-10})^2} = 92{,}1\cdot 10^{-9}\ Кл = 92{,}1 нКл\,.$$

1.2. Определить скорость электрона на первой боровской орбите в атоме водорода, считая, что электрон движется по окружности радиуса *r* = 0,53·10^{-10} м; заряд ядра равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Будем считать, что движение электрона в атоме подчиняется законам механики Ньютона, тогда, с учетом выражения для силы Кулона, второй закон Ньютона может быть записан в виде

$$ma_ц = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

где *m* = 9,10·10^{-31} кг- масса электрона, $a_ц = \frac{v^2}{r}$ -центростремительное ускорение , *e* - элементарный заряд. Подставив выражение для $a_ц$ в формулу (1), выразим искомую скорость:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{mr}}\,.$$

С учетом числовых данных получим значение скорости:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot\frac{(1{,}60\cdot 10^{-19})^2}{9{,}10\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}53\cdot 10^{-10}}} = 2{,}19\cdot 10^6\ м/с\,.$$

1.3. Три точечных заряда q_1 = 1 нКл , q_2 = 3 нКл, q_3 = -3 нКл находятся на одной прямой на равном расстоянии *r* = 10 см друг от друга, при этом заряд q_2 находится между зарядами q_1 и q_3. Определить силу, действующую на каждый из зарядов со стороны двух других.

Определим сначала силу $\vec{F}_1$, действующую на заряд q_1. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{13}$, действующие на q_1 со стороны зарядов q_1 и q_2, изображены на Рис. 1. Из условия задачи следует, что $F_{12} > F_{13}$, поскольку заряды q_2 и q_3 равны по величине, но заряд q_3 находится дальше.

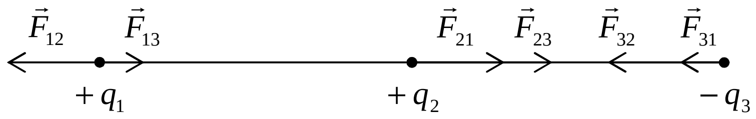


Рис.1

Результирующая сила $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$, эта сила направлена в сторону силы $\vec{F}_{12}$, и величина ее равна:

$$F_1 = F_{12} - F_{13} = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_2|}{r^2} - \frac{|q_3|}{(2r)^2}\right).$$

Аналогично можно найти силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, действующие на заряды q_2 и q_3. Действующие на них силы изображены на Рис. 1.

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{r^2} + \frac{|q_3|}{r^2}\right),$$

$$F_3 = F_{31} + F_{32} = \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{(2r)^2} - \frac{|q_2|}{r^2}\right).$$

Подставим в полученные формулы числовые данные, предварительно выразив *r* в метрах (*r*= 0,1 м), найдем значения сил:

$$F_1 = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{3\cdot 10^{-9}}{0{,}1^2} - \frac{3\cdot 10^{-9}}{(2\cdot 0{,}1)^2}\right) = 135\cdot 10^{-9}\ Н = 135\ нН,$$

$$F_2 = \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1\cdot 10^{-9}}{0{,}1^2} + \frac{3\cdot 10^{-9}}{0{,}1^2}\right) = 1080\cdot 10^{-9}\ Н = 1080\ нН,$$

$$F_3 = \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1\cdot 10^{-9}}{(2\cdot 0{,}1)^2} + \frac{3\cdot 10^{-9}}{0{,}1^2}\right) = 945\cdot 10^{-9}\ Н = 945\ нН.$$

1.4. (9.10)В центр квадрата, в каждой вершине которого находится заряд *q*= 2,33 нКл, помещен отрицательный заряд *q₀*. Найти этот заряд, если на каждый заряд *q* действует результирующая сила *F*= 0.

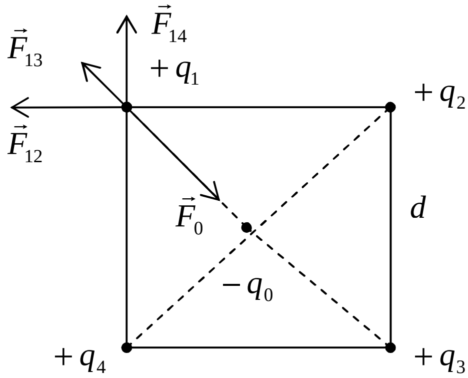


Рис.1

Занумеруем заряды, находящиеся в вершинах квадрата, и обозначим сторону квадрата *d* (см. Рис. 1). В силу симметрии задачи, силы, действующие на каждый из зарядов в вершинах квадрата, равны по величине, поэтому можно рассмотреть любой из зарядов. На Рис. 1 представлены силы, действующие на заряд q_1. Отметим, что сила, действующая на заряд q_0, всегда равна нулю независимо от величины этого заряда, поскольку заряды в вершинах квадрата одинаковы. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{14}$ действующие на заряд q_1 со стороны зарядов q_2 и q_4, равны по величине:

$$F_{12} = F_{14} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

Сила $\vec{F}_{13}$, действующая на заряд q_1, со стороны заряда q_3, равна по величине:

$$F_{13} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}d)^2}.$$

Сила $\vec{F}_0$, действующая на заряд q_1, со стороны заряда q_0, равна по величине:

$$F_0 = \frac{|qq_0|}{4\pi\varepsilon_0 \left(d/\sqrt{2} \right)^2}$$

Результирующая сила $\vec{F}' = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{13}$ направлена вдоль продолжения диагонали квадрата, как сила $\vec{F}_{13}$. Величина $\vec{F}'$ равна:

$$F' = \sqrt{F_{12}^2 + F_{14}^2} + F_{13} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2}).$$

Поскольку сила, действующая на заряд q_1, должна быть равна нулю, то

$$F' = F_0.$$

Приравнивая выражения (1) и (2), выразим q_0:

$$q_0 = -\frac{q}{4}(2\sqrt{2} + 1).$$

Подставляя числовые данные в выражение (3), найдем значение q_0:

$$q_0 = -\frac{2{,}33 \cdot 10^{-9}}{4}(2\sqrt{2} + 1) = -2{,}23 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл} = -2{,}23\ \text{нКл}.$$

1.5. (9.9) Найти напряженность поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами *q_1*= 8 нКл и *q_2*= -6 нКл. Расстояние между зарядами *r* = 10 см.

Для решения задачи воспользуемся формулой напряженности поля точечного заряда и принципом суперпозиции, в соответствии с которым, напряженность поля, созданного в данной точке несколькими точечными зарядами, является векторной суммой напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Каждый из зарядов q_1 и q_2 создает в указанной точке поля с напряженностями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ соответственно. Векторы напряженности изображены на Рис. 1.

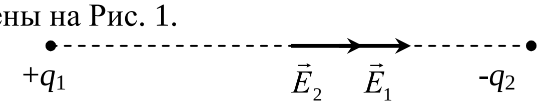


Рис.1

Поскольку векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ сонапрвлены, величина напряженности результирующего поля равна:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (r/2)^2}\left(|q_1| + |q_{21}|\right)$$

Подставляя в полученное выражение числовые данные в системе СИ (r = 0,1 м), найдем значение напряженности:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} (0{,}1/2)^2} \left(8 \cdot 19^{-9} + 6 \cdot 19^{-9} \right) = 5{,}04 \cdot 10^4 \ В/м = 50{,}4 \ кВ/м$$

1.6. В условиях задачи (1.5) найти потенциал поля в указанной точке.

Для решения задачи воспользуемся формулой потенциала поля точечного заряда и принципом суперпозиции для потенциала, в соответствии с которым потенциал поля, созданного в данной точке несколькими точечными зарядами, является алгебраической суммой потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Каждый из зарядов q_1 и q_2 создает в указанной точке поля с потенциалами φ_1 и φ_2соответственно:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 (r/2)},$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r/2)}.$$

Потенциал результирующего поля равен:

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r/2)}.$$

Отметим, что заряд в этих формулах нужно брать не по абсолютной величине, а с учетом знака. Подставим в полученную формулу числовые данные:

$$\varphi = \frac{8 \cdot 19^{-9} - 6 \cdot 19^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} (0{,}1/2)} = 360 \ В.$$

1.7. Два точечных заряда q_1 = 3 нКл и q_2 = -9 нКл находятся на расстоянии r = 50 см. Определить местоположение точки, в которой напряженность поля равна нулю. Найти потенциал поля в указанной точке.

Искомая точка должна лежать на одной прямой с зарядами q_1 и q_2. На Рис.1 представлены возможные местоположения такой точки.

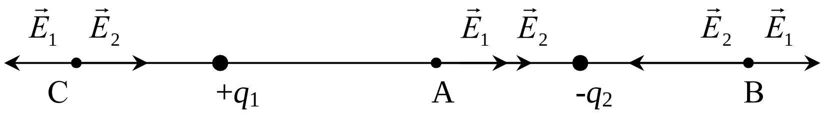


Рис.1

В точке А векторы напряженности полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, созданных зарядами q_1 и q_2 соответственно, сонаправлены, поэтому результирующая напряженность всегда отлична от нуля. В точке В, лежащей справа от заряда q_2, вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны, но $\left|\vec{E}_2\right| > \left|\vec{E}_1\right|$, поскольку $|q_2| > |q_1|$ и заряд q_2 ближе к точке В. Поэтому искомая точка соответствует точке С. Обозначим расстояние от заряда q_1 до точки С – x. Тогда

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 (x)^2}, \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 (r+x)^2}.$$

Из условия равенства нулю результирующей напряженности получим:

$$\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 (x)^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 (r+x)^2}.$$

Найдем значение x:

$$x = \frac{r\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_2|} - \sqrt{|q_1|}}.$$

Проведем расчет:

$$x = \frac{50\sqrt{1\cdot 10^{-9}}}{\sqrt{9\cdot 10^{-9}} - \sqrt{1\cdot 10^{-9}}} = 25\ см\ .$$

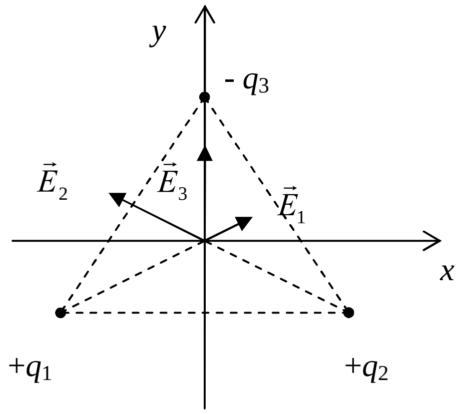
Найдем потенциал в указанной точке:

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r+x)}\ .$$

$$\varphi = \frac{1\cdot 19^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 0{,}25} - \frac{9\cdot 19^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}(0{,}5+0{,}25)} = -72\ В$$

Отметим, что потенциал поля в данной точке отличен от нуля.

1.8. В вершинах равностороннего треугольника со стороной *a* = 10 см находятся точечные заряды *q*₁= +1 нКл, *q*₂=+1,5 нКл и *q*₃= - 2 нКл. Определить напряженность и потенциал поля в центре треугольника и силу, которая будет действовать на заряд *q*₀ =+4 нКл, помещенный в центр треугольника.



Напряженности полей $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, созданных зарядами q_1, q_2, q_3 соответственно в центре треугольника (т.е. в точке пересечения высот, медиан, биссектрис), представлены на Рис.1. Для определения результирующей напряженности $\vec{E}$, равной

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\ ,$$

удобно ввести систему координат, как показано на Рис.1 и найти проекции векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ на координатные оси. Затем можно найти проекции E_x и E_y результирующего вектора $\vec{E}$ на координатные оси:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1\cos 30° - E_2\cos 30°$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = E_1\cos 60° + E_2\cos 60° + E_3\ .$$

Напряженности, созданные каждым из зарядов можно найти по общей формуле:

$$E_i = \frac{|q_i|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\text{, где } r = \frac{2}{3}a\sin 60°\text{, а } i = 1,2,3.$$

Окончательно для величины результирующей напряженности получим выражение:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_1 = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{\frac{3}{4}\left(|q_1| + |q_2|\right)^2 + \left(\frac{|q_1|}{2} + \frac{|q_2|}{2} + |q_3|\right)^2}\ .$$

Подставляя в полученное выражение числовые данные в системе СИ (a = 0,1 м), найдем значение напряженности:

$$E = \frac{3}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}(0{,}1)^2}\sqrt{\frac{3}{4}\left(1\cdot 10^{-9} + 1{,}5\cdot 10^{-9}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 10^{-9}}{2} + \frac{1{,}5\cdot 10^{-9}}{2} + 2\cdot 10^{-9}\right)^2} = 10{,}5\cdot 10^3\ В$$

$$= 10{,}5\ кВ$$

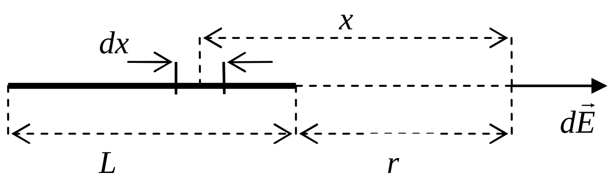
Найдем силу $\vec{F}$, действующую на заряд q_0, помещенный в центр треугольника:

$\vec{F} = q_0\vec{E}$.

Поскольку q_0 – положительный заряд, направление силы $\vec{F}$ совпадает снаправлением напряженности $\vec{E}$, величина силы равна:

$F = 4\cdot 10^{-9}\cdot 10{,}5\cdot 10^{3} = 42\cdot 10^{-6}\ Н = 42\ мкН$.

1.9. Определить напряженность поля, созданного отрезком тонкой заряженной нити длиной L в точке, лежащей на продолжении отрезка на расстоянии *a* от одного из его концов, если заряд *q* распределен по отрезку равномерно. Рассмотреть случай, когда $a >> L$.



Для нахождения напряженности воспользуемся формулой напряженности точечного заряда и принципом суперпозиции. Для этого разобьем отрезок на элементарные участки длиной dx (см. рис.), которые можно считать точечными зарядами, и рассмотрим напряженность поля $d\vec{E}$, созданного таким участком. Направление вектора $d\vec{E}$ на рисунке соответствует случаю положительного заряда отрезка. Любой другой элементарный участок отрезка создает в указанной точке поле, вектор напряженности которого направлен точно так же. Поэтому величину результирующей напряженности можно найти, просуммировав модули напряженностей от отдельных участков. Вектор результирующей напряженности $\vec{E}$ будет сонаправлен с $d\vec{E}$. Поскольку заряд q распределен по отрезку непрерывно, суммирование следует заменить интегрированием по отрезку:

$$E = \int dE ,$$

где интегрирование ведется по отрезку. Для определения dE воспользуемся формулой напряженности поля точечного заряда:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$

где $dq = \frac{q}{L}dx$ - заряд, сосредоточенный на участке dx. Тогда:

$$E = \int\limits_{r}^{r+L} \frac{q dx}{4\pi\varepsilon_0 L x^2}.$$

Выполнив интегрирование, получим выражение для E:

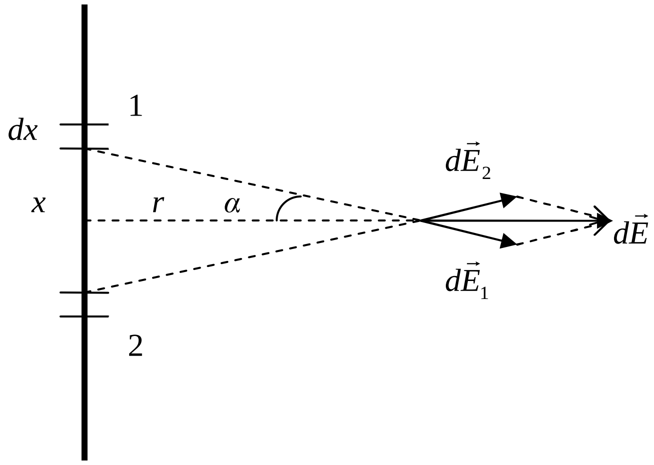
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r(r+L)}.$$

Проанализируем полученное выражение при $r>>L$, на больших расстояниях от отрезка. Очевидно, что в этом случае поле должно совпадать с полем точечного заряда. Действительно, пренебрегая в знаменателе L по сравнению с r, получим:

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

1.10. Определить напряженность и потенциал поля, созданного отрезком тонкой заряженной нити длиной *L* а точке, лежащей на срединном перпендикуляре на расстоянии *a* от нити, если заряд *q* распределен по отрезку равномерно. Рассмотреть случаи $a >> L$, $L >> a$.

Решать задачу будем аналогично предыдущей. Заряд отрезка будем считать положительным. Разобьем отрезок на элементарные участки длиной *dx* и рассмотрим два таких участка, расположенных симметрично относительно центра на расстоянии *x* (см. рис.).



Данные элементарные участки создают в указанной точке поля с напряженностями $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$, причем

$$dE_1 = dE_2 = \frac{qdx}{4\pi\varepsilon_0 L(x^2 + r^2)}.$$

Вектора $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$ образуют с перпендикуляром к отрезку равные углы α, вектор результирующей напряженности $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ направлен вдоль срединного перпендикуляра. Так же будет направлен вектор напряженности поля, созданного любой другой парой симметрично расположенных участков отрезка.

$$dE = 2dE_{1,2}\cos\alpha = 2dE_{1,2}\frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{2qrdx}{4\pi\varepsilon_0 L(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Для получения величины результирующей напряженности проинтегрируем полученное выражение по отрезку:

$$E = \int_0^{L/2} \frac{2qrdx}{4\pi\varepsilon_0 L(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}.$$

Проанализируем полученное выражение. При $r >> L$ получим для E:

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

которое совпадает с выражением для поля точечного заряда.

При $r << L$ для E получим следующее выражение:

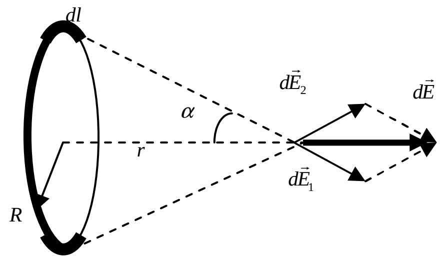
$$E \approx \frac{q/L}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Введем линейную плотность заряда отрезка $\lambda = \frac{q}{L}$, тогда выражение для E принимает вид:

$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Это выражение совпадает с формулой для напряженности поля длинной равномерно заряженной нити, которое можно получить, используя теорему Гаусса.

1.11. Определить напряженность и потенциал поля в точке, лежащей на оси тонкого равномерно заряженного кольца на расстоянии *a* от центра кольца. Радиус кольца R, заряд q. Рассмотреть случаи *a* = 0, $a >> R$.



В данной задаче проще сначала найти потенциал поля φ в указанной точке, а затем напряженность. Для вычисления потенциала воспользуемся формулой потенциала точечного заряда и принципом суперпозиции для потенциала. Разобьем кольцо на элементарные участки длиной *dl*, которые можно считать точечными зарядами. Заряд такого участка равен:

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl .$$

Потенциал $d\varphi$ поля, созданного в указанной точке таким элементом кольца равен:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + r^2)}} = \frac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{(R^2 + r^2)}} .$$

В соответствии с принципом суперпозиции, для определения потенциала, созданного всем кольцом, проведем интегрирование полученного выражения по всему кольцу:

$$\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{(R^2 + r^2)}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + r^2)}} .$$

Используя связь между напряженностью и потенциалом: $\vec{E} = -grad\varphi$, и учитывая, что потенциал φ в данном случае зависит лишь от одной переменной *r*, получим:

$$E_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + r^2)}}\right) = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси кольца. На рис. направление вектора $\vec{E}$ соответствует положительному заряду кольца.

В центре кольца (при *r* = 0) для напряженности и потенциала получим следующие выражения:

$$\vec{E} = 0, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} .$$

На больших расстояниях от кольца (при *r* >>L) выражения для напряженности и потенциала соответствуют формулам для поля точечного заряда:

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \ \varphi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

1.12. Заряд *q* распределен равномерно по сферической поверхности радиуса *R*. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}(r)$ как функцию расстояния *r* до центра сферы.

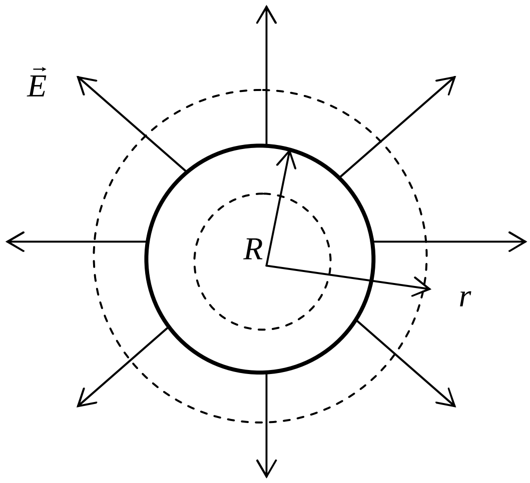


Рис.1

Применять теорему Гаусса для расчета напряженности электрического поля целесообразно тогда, когда распределение заряда обладает определенной пространственной симметрией. Поле, созданное равномерно заряженной сферической поверхностью, будет центрально-симметричным, т.е. вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиуса сферы и зависит только от расстояния r до центра сферы. Тогда выберем сферическую замкнутую поверхность радиуса r с центром в центре сферы. На Рис.1 показаны пунктиром две такие поверхности с радиусами $r < R$ и $r > R$. Поток вектора напряженности через такую поверхность можно легко рассчитать, если учесть, что, в силу сделанных предположений о симметрии поля, вектор $\vec{E}$ сонаправлен с вектором нормали в каждой точке поверхности, поэтому $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}$. Кроме того, значение напряженности E постоянно всюду на поверхности. Тогда:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E \cdot 4\pi \cdot r^2 .$$

Если $r < R$, то внутри поверхности нет зарядов, следовательно:

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = 0,$$

поэтому $E = 0$. Если $r > R$, то внутри поверхности находится весь заряд сферы q, следовательно:

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Таким образом, внутри равномерно заряженной сферы электростатическое поле отсутствует, вне сферы поле зависит от r так же, как поле точечного заряда q, помещенного в центр сферы. При $r = R$ функция $E(r)$ терпит разрыв, скачком меняясь от нуля до значения $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

1.13. Воспользовавшись результатами задачи (1.12), найти потенциал электрического поля $\varphi(r)$ как функцию расстояния *r* до центра сферы.

Найдем сначала потенциал точек внутри сферы, при $r < R$. Использую формулу, связывающую потенциал и напряженность получим:

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{l} = \int_r^R Edr + \int_R^\infty Edr \ .$$

В соответствии с результатами предыдущей задачи, при $r < R$ поле E=0, поэтому первое слагаемое в предыдущей формуле равно нулю. Учитывая зависимость $E(r)$ при $r > R$, получим:

$$\varphi = \int_R^\infty Edr = \int_R^\infty \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \ .$$

Для точек вне сферы, при $r > R$, получим:

$$\varphi = \int_r^\infty Edr = \int_r^\infty \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Отметим, что при $r = R$ потенциал, в отличие от напряженности, не испытывает разрыва.

1.14. Заряд распределен с постоянной объемной плотностью ρ по объему шара радиуса *R*. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}(r)$ как функцию расстояния *r* до центра шара.

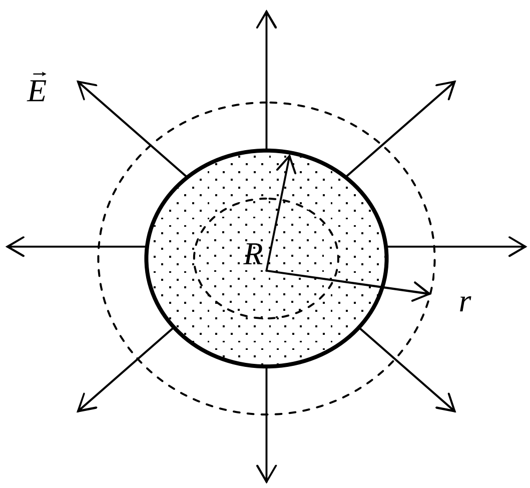


Рис.1

Поскольку равномерно заряженный шар создает поле, обладающее центральной симметрией, задачу решаем также, как задачу ( ). Но следует учесть, что при $r < R$ внутри поверхности интегрирования будет находиться заряд $(4/3)\pi r^3 \rho$, поэтому

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} .$$

Тогда

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} .$$

При $r > R$ внутри поверхности интегрирования оказывается весь заряд шара, тогда

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ,$$

где $q = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho$ - полный заряд шара.

Таким образом, при $r < R$ напряженность поля линейно растет с удалением от центра шара, достигая максимума при $r = R$. При $r > R$ поле уменьшается с ростом *r*, как поле точечного заряда, помещенного в центре шара.

1.15. Воспользовавшись результатами задачи (1.14), найти потенциал электрического поля $\varphi(r)$ как функцию расстояния *r* до центра шара.

Также, как и в задаче ( ) найдем сначала потенциал точек внутри шара, при $r < R$:

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{l} = \int_r^R Edr + \int_R^\infty Edr .$$

Учитывая зависимость *E(r),* полученную в предыдущей задаче, вычислим потенциал:

$$\varphi = \int_R^\infty Edr = \int_r^R \frac{\rho\, rdr}{3\varepsilon_0} + \int_R^\infty \frac{\rho R^3 dr}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right).$$

Для точек вне шара, при $r > R$, получим:

$$\varphi = \int_r^\infty Edr = \int_r^\infty \frac{\rho\, R^3 dr}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\, R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Таким образом, вне шара потенциал поля шара тождественен потенциалу поля точечного заряда, помещенного в центре шара.

1.16. Поле создано длинной равномерно заряженной нитью. Линейная плотность заряда нити λ. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}(r)$ как функцию расстояния *r* до нити.

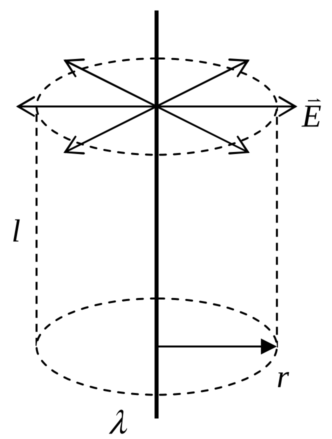


Рис.1

В силу симметрии распределения заряда следует предположить, что напряженность поля, созданного такой заряженной нитью, должна быть направлена в каждой точке перпендикулярно нити и может зависеть лишь от расстояния *r* до нити. Тогда, применяя теорему Гаусса, выберем поверхность интегрирования в виде замкнутого цилиндра радиуса *r* и высотой *l*, ось которого совпадает с нитью.

При вычислении потока вектора напряженности через такую поверхность целесообразно вычислить отдельно поток через основания цилиндра и через боковую поверхность:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{основания}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{\substack{\text{боковая}\\\text{поверхность}}} \vec{E}d\vec{S}\ .$$

Поток через основания равен нулю, т.к. всюду на основаниях вектор $\vec{E}$ перпендикулярен вектору нормали к поверхности, поэтому $\vec{E}d\vec{S} = 0$. На боковой поверхности вектор $\vec{E}$ сонаправлен вектору нормали, кроме того $E = const$, поскольку все точки боковой поверхности равноудалены от нити. Тогда

$$\int\limits_{\substack{\text{боковая}\\\text{поверхность}}} \vec{E}d\vec{S} = E \int\limits_{\substack{\text{боковая}\\\text{поверхность}}} dS = E \cdot 2\pi rl\ .$$

Внутри поверхности интегрирования находится отрезок нити длиной l, несущий заряд λl. Тогда

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}.$$

Формула для напряженности имеет вид:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

1.17. Найти напряженность поля, созданного равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда *σ*.

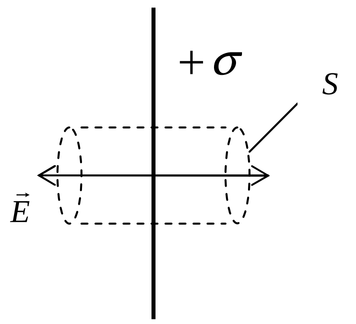


Рис.1

В силу симметрии распределения заряда следует предположить, что напряженность поля, созданного такой заряженной плоскостью, должна быть направлена в каждой точке перпендикулярно плоскости и может зависеть лишь от расстояния до плоскости. Тогда, применяя теорему Гаусса, выберем поверхность интегрирования в виде замкнутого цилиндра с площадью основания S, ось которого перпендикулярна плоскости, а основания расположены зеркально симметрично относительно плоскости. Также, как и в предыдущей задаче вычислим поток отдельно через основания цилиндра и через боковую поверхность. В данном случае поток через боковую поверхность равен нулю, т.к. всюду на боковой поверхности вектор $\vec{E}$ перпендикулярен вектору нормали к поверхности. На основаниях вектор $\vec{E}$ сонаправлен вектору нормали, кроме того $E = const$. Поток через основания равен:

$$\int\limits_{\text{основания}} \vec{E}d\vec{S} = E \cdot 2S\ .$$

Внутри поверхности интегрирования находится участок плоскости площадью *S*, несущий заряд σS. Тогда

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

Равномерно заряженная плоскость создает однородное поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Заметим, что бесконечных заряженных плоскостей, конечно, не существует. Поэтому применять данную формулу на практике можно в том случае, когда поле создано зарядом, равномерно распределенным по некоторой ограниченной плоской поверхности, а точка, в которой рассматривается поле, находится близко к поверхности, т.е. на расстояниях малых по сравнению с характерным линейным размером поверхности, но далеко от краев поверхности.

1.18. (9.25)Две длинные равномерно заряженные нити расположены на расстоянии *r*= 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях λ_1= λ_2= 10 мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности $\vec{E}$ результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии *a*= 10 см от каждой нити.

На Рис.1 показано сечение нитей возможное местоположение точек, удовлетворяющих условию задачи. Найдем величину напряженности в точке *A* (в точке *B* напряженность по величине такая же, как в точке *A*).

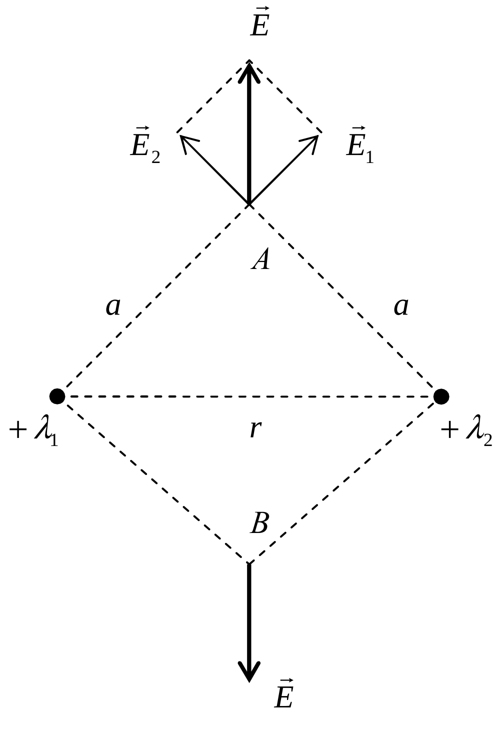


Рис.1

Напряженности полей, созданных в точке *A* каждой нитью, указаны на Рис.1.

$$E_1 = E_2 = \frac{\lambda_{1,2}}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Результирующая напряженность E равна:

$$E = 2E_{1,2}\cos\alpha = \frac{\lambda_{1,2}}{\pi\varepsilon_0 a}\cos\alpha.$$

Поскольку, согласно условию задачи $a = r$, то $\alpha = \pi/6$, тогда:

$$E = \frac{\lambda_{1,2}\sqrt{3}}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Проведем расчет, подставляя в полученную формулу числовые данные в системе СИ ($a = r = 0{,}1\,м$).

$$E = \frac{10^{-5}\sqrt{3}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 3{,}12\cdot 10^{6}\ В/м = 3{,}12\,МВ/м.$$

1.19. Заряд распределен равномерно по двум ~~параллельным~~ плоскостям с поверхностной плотностью σ_1 = -20 нКл/м^2 и σ_2=40 нКл/м^2 . Определить напряженность поля во всем пространстве.

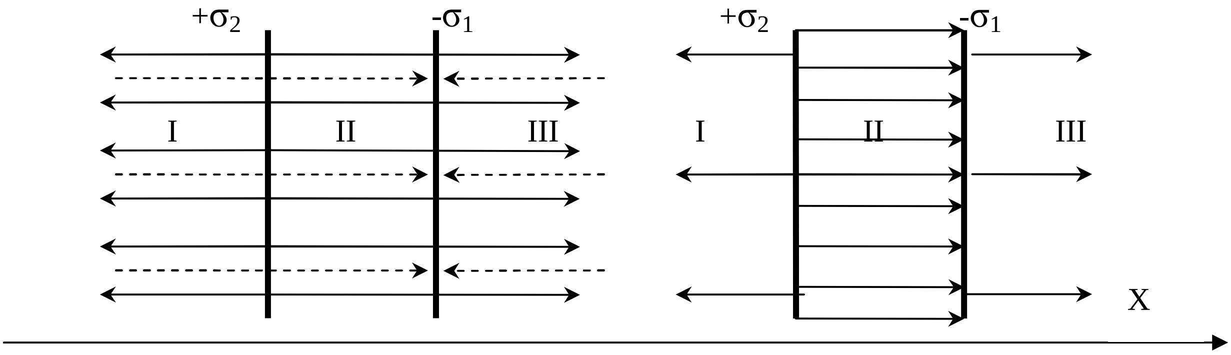


Рис.1. **Рис.2**

Каждая из заряженных плоскостей создает однородное электрическое поле, линии напряженности этих полей изображены на Рис. 1. Линии напряженности от отрицательно заряженной плоскости направлены в сторону этой плоскости и изображены пунктиром. Линии напряженности положительно заряженной плоскости изображены сплошными, их густота выше, поскольку $|\sigma_2| > |\sigma_1|$. В областях I и III вектора напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны, напряженность результирующего поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ направлена в сторону вектора $\vec{E}_2$, а проекции вектора $\vec{E}$ на ось ОХ соответственно равны:

$$E_x(I) = \frac{|\sigma_1| - ||\sigma_2|}{2\varepsilon_0}, \quad E_x(III) = \frac{|\sigma_2| - ||\sigma_1|}{2\varepsilon_0}.$$

В пространстве между плоскостями, в области II, векторы напряженности полей, созданных каждой плоскостью сонаправлены:

$$E_x(II) = \frac{|\sigma_1| + ||\sigma_2|}{2\varepsilon_0}.$$

Результирующая картина силовых линий представлена на Рис.2.

Соответствующий расчет для величины напряженности поля в области I и II дает значение

$E(I;II) = 1{,}12\ кВ/м$.

В области III:

$E(III) = 3{,}36\ кВ/м$

1.20. (9.46)Шарик массой *m* = 1 г и зарядом *q* = 10 нКл перемещается из точки 1, потенциал которой φ_1 = 600 В, в точку 2, потенциал которой φ_2 = 0. Найти его скорость в точке 1, если в точке 2 она стала равной v_2 = 20 см/с.

Пренебрегая потерями энергии шарика на излучение, которое всегда имеет место при ускоренном движении заряженного тела, можно считать, что изменение кинетической энергии шарика равно работе электростатического поля:

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2}-\frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}=q(\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

Тогда

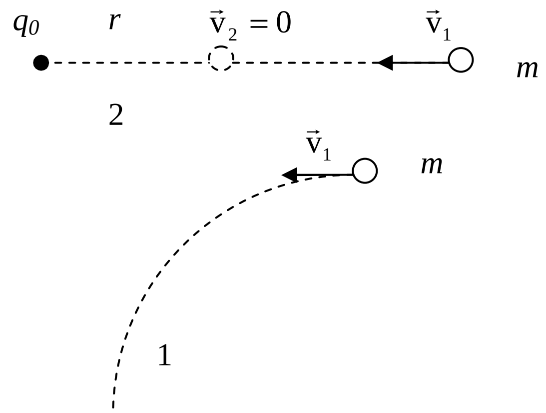
$$\mathrm{v}_1=\sqrt{\mathrm{v}_2^2-\frac{2q\varphi_1}{m}}\,.$$

Подставляя числовые данные в системе СИ (v_2 = 0,2 м/с, m = 0,001 кг) найдем v_1:

$$\mathrm{v}_1=\sqrt{0{,}2^2-\frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 600}{0{,}001}}=0{,}167\ \text{м/с}\,.$$

1.21. (9.38)Шарик массой *m* = 40 мг, имеющий положительный заряд *q* = 1 нКл, движется со скоростью v = 10 см/с. На какое расстояние *r* может приблизиться шарик к положительному точечному заряду *q₀*= 1,33 нКл?

Решать задачу будем в предположении, что первоначально шарик находится достаточно далеко от заряда q_0, и можно считать, что поле заряда q_0 в этой области пространства отсутствует. Как и в предыдущей задаче, будем пренебрегать потерями энергии ускоренно движущегося шарика на излучение. Тогда в процессе движения должен сохраняться момент импульса шарика относительно точки положения заряда q_0. В результате траекторией движения шарика будет гипербола (кривая 1 на рис.)



Рассмотрим случай, когда начальная скорость шарика направлена вдоль прямой, соединяющей заряд и центр шарика (траектория 2 на рис.). Тогда в процессе движения скорость шарика всегда будет направлена вдоль этой прямой. По мере приближения к заряду q_0 скорость шарика будет уменьшаться из-за действия силы отталкивания со стороны заряда q_0 и на минимальном расстоянии *r* станет равной нулю. Затем шарик начнет ускоренно двигаться в противоположном направлении. Отметим, что при движении шарика по гиперболической траектории его скорость всегда будет отлична от нуля, поэтому минимальное расстояние от шарика до заряда всегда будет больше, чем при движении по прямой при том же значении начальной скорости.

С учетом сделанных выше предположений запишем изменение кинетической энергии шарика:

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2}-\frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}=q(\varphi_1-\varphi_2)\,,$$

где $\mathrm{v}_1=\mathrm{v}$, $\mathrm{v}_2=0$, $\varphi_1=0$. Поскольку $\varphi_2=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$, то

$$r=\frac{q_0 q}{2\pi\varepsilon_0 m\mathrm{v}^2}\,.$$

Числовой расчет дает следующее значение: *r* = 6 см.

1.22. Два маленьких шарика массами m_1 = 3 г и m_2 = 2 г, несущие заряды q_1 = 1 мкКл г и q_2 = -5 мкКл соответственно удерживают на расстоянии d = 1м друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив первому из них скорость v_1 = 5 м/с, направленную от второго шара вдоль прямой, соединяющей центры шаров. На какое максимальное расстояние D могут разойтись шары?

Отличие данной задачи от предыдущей состоит, прежде всего, в том, что данном случае двигаться будут оба шара. Если пренебречь взаимодействием шаров с другими телами, то систему можно считать замкнутой, поэтому импульс системы шаров должен сохраняться. Так же, как и предыдущих задачах, будем пренебрегать потерями энергии шаров на излучение, тогда должна сохраняться механическая энергия системы, поскольку между шарами действуют только кулоновские силы, а они – потенциальны. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось OX, направленную в сторону скорости $\vec{v}_1$, и закон сохранения энергии:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 D}.$$

Можно показать, что в момент максимального удаления шаров, когда потенциальная энергия их взаимодействия максимальна, относительная скорость шаров равна нулю, т.е. в лабораторной системе отсчета скорости шаров в этот момент равны: $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. Решая с учетом этого условия полученную ранее систему уравнений, найдем расстояние D:

$$D = \frac{d}{1 + \dfrac{2\pi\varepsilon_0 d\ m_1 m_2 v_1^2}{(m_1 + m_2) q_1 q_2}}.$$

Заметим, что заряды шаров входят в полученное выражение с учетом их знаков, поэтому второе слагаемое в знаменателе отрицательно (q_2<0). Поэтому при условии

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 d\ m_1 m_2 v_1^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|} \geq 1$$ значение D обращается в бесконечность и становится отрицательным.

Физически это означает, что при таком условии шарики никогда не будут сближаться, а разойдутся на бесконечно большое расстояние. Подстановка числовых данных в системе СИ дает значение D = 1,5 м.